ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 13 Mai de 14h à 18h

Dans ce problème on désigne par T l'ensemble des suites $t : \mathbb{N}^* \to \{0,1,2\}$, donc des suites de terme général $t_n \in \{0,1,2\}$ pour $n = 1,2,3,4,\ldots$ et par D l'ensemble des suites de $\mathbb{N}^* \to \{0,1\}$, donc des suites de terme général $d_n \in \{0,1\}$ pour $n = 1,2,3,4,\ldots$. Soient σ et σ' les applications numériques définies sur T et D par

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{3^k} \quad \text{et} \quad \sigma'(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{2^k}$$

Sous des notations usuelles :

Im $t \subset \{0,1,2\}$ représente l'ensemble des images par t donc les t_n,

$t^{-1}(\{1\})$ représente l'ensemble des entiers d'image 1 par t,

Inf $t^{-1}(\{1\})$ représente le premier entier n_o tel que $t_{n_o} = 1$.

Soit v l'application $v : T \to D$ qui à $t \in T$ associe $d \in D$ de la manière suivante :

1) Si $1 \notin$ Im t, alors si $t_n = 0$ on pose $d_n = 0$ et si $t_n = 2$ on pose $d_n = 1$.

2) Sinon soit $n_o = \text{Inf } t^{-1}(\{1\})$,

pour $p < n_o$, d_p est défini comme ci-dessus,

pour $p = n_o$ on pose $d_{n_o} = 1$,

pour $n_o < p$ on pose $d_p = 0$.

I. Soient enfin t et t' deux suites de T. S'il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on ait $t_{n_o} < t'_{n_o}$ alors que pour $p < n_o$ on a $t_p = t'_p$ on dit que t est inférieur à t' et on note $t < t'$.

1) Montrer que pour $t \neq t'$ la relation " $t < t'$ ou $t' < t$ " est vraie, ($t \leq t'$ est définie par $t < t'$ ou $t = t'$).

2) Montrer que si on a $t \leq t'$, alors on a $\sigma(t) \leq \sigma(t')$.

3) Soit n_o introduit ci-dessus dans la définition $t < t'$, montrer que $t_{n_o} = 0$ et $t'_{n_o} = 2$ impliquent $\sigma(t) < \sigma(t')$.

4) On suppose maintenant $t < t'$ avec $t_{n_o} + 1 = t'_{n_o}$ peut-on avoir $\sigma(t) = \sigma(t')$?

II. A $x \in [0,1[$ on associe deux suites $t \in T$ et r de la manière suivante : on pose $r_1 = x$, sinon les termes généraux t_n et r_n de ces suites sont définis par récurrence par $r_n = \frac{1}{3^n} t_n + r_{n+1}$ et $0 \leq r_{n+1} < \frac{1}{3^n}$. On pose $u(x) = t$.

1) Montrer que l'application u est définie sur $[0,1[$.

2) u est-elle injective ?

3) u est-elle surjective ?

4) Que dire des applications $\sigma \circ u$ et $u \circ \sigma$?

5) $t' \in T$ étant donnée, résoudre en $t \in T$ l'équation $(u \circ \sigma)(t) = t'$.

6) Montrer que l'application $w = \sigma' \circ v \circ u$ est croissante.

7) Expliciter $w^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $w^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$, $w^{-1}(\{\frac{7}{8}\})$.

III. Dans cette partie du problème il sera toujours préférable de remplacer une explication confuse par un dessin clair.

Soit f une fonction affine définie sur $[a,b]$ où $a < b$. Il existe donc deux constantes p et q telles que pour tout $x \in [a,b]$ on ait $f(x) = px + q$.

1) Montrer que si l'on connait les images a' et b' de a et b par f alors on peut déterminer p et q, donc f est connue.

2) On pose $b - a = \ell$, $a_o = a$, $a_1 = a + \frac{\ell}{3}$, $a_2 = a + \frac{2\ell}{3}$, $a_3 = b$ et on définit l'application continue g affine sur $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$ et $[a_2,b]$, donc "affine par morceaux" par $g(a) = f(a)$, $g(a_1) = g(a_2) = f(\frac{a+b}{2})$, $g(b) = f(b)$.

Montrer que la représentation graphique de g est une ligne polygonale de trois côtés. On appelle palier horizontal ou palier celui pour lequel $g'(x) = 0$ on appelle obliques les deux autres côtés. Donner les longueurs du palier et celles de chaque oblique.

IV. On pose $\tau(f) = g$ et on se propose d'étendre τ aux fonctions affines par morceaux. On appelle application caractéristique toute application définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble image a au plus deux éléments 0 et 1. Si h est une telle fonction et si $A = h^{-1}(\{1\})$ est l'ensemble des éléments dont l'image par h vaut 1 on note χ_A cette application h.

Soit une suite finie $a_o = a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = b$ strictement croissante (donc pour tout $k \in \{0,1,2\ldots n-1\}$ on a $a_k < a_{k+1}$). On pose $\Delta = [a,b] - \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ et on considère l'application k restriction à Δ de $\sum_{k=0}^{n-1} p_k \chi_{[a_k, a_{k+1}[}$ où pour tout $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ on a $p_k \neq p_{k+1}$.

1) Montrer qu'existe une seule fonction g continue affine par morceaux dont on connait l'image y_o en un point $x_o \in [a,b]$ et dont la dérivée g' sur Δ est k.

2) Soit $g_o, g_1, \ldots, g_{n-1}$ les fonctions affines restriction de g à $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$ ... $[a_{n-1},b]$, et $\tau(g_o)$, $\tau(g_1)$, $\tau(g_2)\ldots,\tau(g_{n-1})$ leurs images par τ (cf III 2) on définit $\tau(g)$ par ses restrictions :

$$\tau(g_o),\ \tau(g_1),\ldots,\ \tau(g_{n-1}) .$$

a) Montrer que $\tau(g)$ a pour représentation graphique une ligne polygonale ; en donner le nombre de paliers et le nombre d'obliques.

b) Soit k la fonction périodique de période 2 définie sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à $[-1,1]$ est définie par $k(x) = |x|$. On désigne par k_1 et k_2 les restrictions de k à $[0,2]$ et $[0,\frac{3}{2}]$. Construire $\tau(k_1)$ et $\tau(k_2)$. Montrer que $\tau(k_2)$ n'est pas la restriction à $[0,\frac{3}{2}]$ de $\tau(k_1)$.

V. Dans la suite f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$, on pose $f_1 = \tau(f)$, $f_2 = \tau(f_1),\ldots,f_n = \tau(f_{n-1})$.

1) Montrer que la représentation graphique de f_n est une ligne polygonale T_n.

2) Quelle est la somme k_n des longueurs de paliers de T_n ?

3) Quelle est la somme θ_n des longueurs des obliques de T_n ?

4) Quelle est la longueur $\ell_n = k_n + \theta_n$ de T_n ?

5) Calculer $\int_o^1 f_n(x)dx$.

6) Donner les limites des suites k_n, θ_n et ℓ_n.

VI. On appelle suite stationnaire toute suite constante à partir d'un certain rang. Pour $x_o \in [0,1]$ on considère la suite numérique de terme général $f_n(x_o)$ et on désigne par $S \subset [0,1]$ l'ensemble des éléments de $[0,1]$ pour lesquels cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

1) Préciser S.

2) Montrer que pour $x_o \in [0,1] - S$ la suite $f_n(x_o)$ est telle que pour tout n on a $f_n(x_o) \neq f_{n+1}(x_o)$ et montrer que cette suite converge.

VII. Pour $x \in [0,1]$ on définit ψ par $\psi(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$; $\psi'_d(x)$ et $\psi'_g(x)$ désignent, quand elles existent, les dérivées à droite et à gauche de ψ en x pour $x \in [0,1[$ ou $x \in]0,1]$. (Rappelons que pour $x_o \in [0,1[$ par exemple $\psi'_d(x_o)$ et si elle existe la limite de $\frac{\psi(x) - \psi(x_o)}{x - x_o}$ quand x tend vers x_o par valeurs supérieures).

1) Etudier l'application $w - \psi$.

2) Montrer que ψ est continue.

3) Montrer que ψ est intégrable et calculer $\int_o^1 \psi(x)dx$.

4) ψ'_d est-elle définie en tout point de $[0,1[$?

5) ψ_g est-elle définie en tout point de $]0,1]$?

6) Préciser la partie P de $[0,1[$ où ψ'_d n'est pas définie.